Documento de Investigación
DI-138
Julio, 1988

UNA INTRODUCCION A LA TEORIA DE LOS JUEGOS

Joan E. Ricart

IESE Business School – Universidad de Navarra
Avda. Pearson, 21 – 08034 Barcelona, España. Tel.: (+34) 93 253 42 00 Fax: (+34) 93 253 43 43
Camino del Cerro del Águila, 3 (Ctra. de Castilla, km 5,180) – 28023 Madrid, España. Tel.: (+34) 91 357 08 09 Fax: (+34) 91 357 29 13

UNA INTRODUCCION A LA TEORIA DE LOS JUEGOS

Joan E. Ricart[1]

Resumen

Este artículo es una sencilla introducción a la teoría de los juegos con el objeto de servir de introducción a un número de *Cuadernos Económicos de ICE* en curso de edición. El artículo empieza con una definición de la forma estratégica de un juego y el concepto de equilibrio, así como los teoremas de existencia de dicho equilibrio. Seguidamente, se estudian los juegos en forma extensiva con los resultados fundamentales. Asimismo, se estudian en detalle los juegos de suma cero y su resolución. Finalmente, se presenta un pequeño panorama de otros juegos y se introduce al resto del volumen.

[1] Profesor de Economía, IESE

UNA INTRODUCCION A LA TEORIA DE LOS JUEGOS

Introducción

Un juego puede definirse como «*todo problema de decisión donde hay más de un agente decisor y las decisiones de un jugador tienen efectos sobre el otro*». Los juegos más interesantes son aquellos donde *los intereses de los agentes están completa o parcialmente contrapuestos*. Esta definición de juego contiene varios elementos a remarcar. Por un lado, tenemos varios agentes decisores. En caso contrario, si sólo hay un agente decisor, sería un problema de análisis de decisiones, probablemente bajo incertidumbre, para el cual se dispone de numerosas técnicas de resolución o análisis. Para tener un juego debemos tener al menos dos agentes o jugadores cuyas decisiones interaccionan de forma que pueden afectar los intereses de los otros jugadores. Esto nos lleva al segundo punto. Todo juego no trivial debe tener algún aspecto de *conflicto de intereses*, aunque se puede pensar en juegos en los cuales el único problema es coordinación, ya que los intereses de los jugadores coinciden. En estos juegos, el "conflicto" se presenta en la regla de coordinación entre los jugadores. La ausencia de conflicto de intereses trivializa el juego. Aunque formalmente sigue siendo un juego, nos parece adecuado incluir un nivel de conflicto en la definición del mismo.

Nuestro mundo está lleno de situaciones de conflicto, por lo que el ámbito de aplicación de los juegos es muy amplio. Algunos ejemplos presentes en el mundo empresarial podrían ser temas tan diversos como guerras de precios entre competidores, introducción de nuevos productos, continuación de programas de investigación en nuevos procesos, pujas en contratos públicos, negociaciones de contratos para la venta de instalaciones de ordenadores de varios millones de dólares, negociaciones con los sindicatos, etc. El diseño de estrategias competitivas, su ejecución, las múltiples negociaciones cotidianas dentro y fuera de las organizaciones, e incluso nuestras relaciones interpersonales, están repletas de factores estratégicos que pueden analizarse en el esquema conceptual de la teoría de juegos.

Las situaciones competitivas son difíciles de analizar y de entender, ya que interrelacionan muchas esferas de la actividad humana. La teoría de los juegos nos aporta un marco conceptual para el estudio de estas situaciones. Cuestiones importantes a desarrollar serán el estudio de las reacciones competitivas, el efecto de la información privada, las implicaciones de la repetición de la misma situación en el tiempo, las reglas de cooperación, las posibilidades de emisión de señales y comunicación al alcance de los participantes, etc. La teoría de los juegos no responderá a todas estas cuestiones con la claridad deseada, pero nos suministrará las herramientas necesarias para tratar estos temas con rigor y hacer recomendaciones adecuadas, además de mejorar nuestra comprensión de las situaciones de conflicto en general.

Aunque la teoría de los juegos en sus aspectos matemáticos tiene ya muchos años de vida, su verdadera introducción en las ciencias económicas como una herramienta útil para el análisis de situaciones de conflicto se debe a J. von Neumann y O. Morgensten, con su libro "Theory of Games and Economic Behaviour", que se publica en 1944 con un objetivo muy ambicioso: dotar a la economía de unos instrumentos que le permitieran transformarse en una ciencia exacta. Es el inicio de una concienzuda formalización en los modelos económicos que continúa en auge hoy en día. Pasando a través de períodos de súper optimismo y de rechazo, los años han consolidado la teoría de los juegos como una herramienta básica en los modelos económicos en un espectro cada vez más sofisticado de instrumentos alternativos.

Simultáneamente, la propia teoría ha evolucionado en respuesta a las demandas de la economía. El análisis del papel del comportamiento estratégico en la economía ha sido una actividad en auge durante los últimos años. Para poder avanzar en este análisis se han ido mejorando los conceptos utilizados en dicha teoría. Dentro de la vertiente no cooperativa de los juegos –la adecuada para el análisis estratégico–, hay tres direcciones de investigación que merecen nombrarse de forma específica dentro de un espectro más amplio de la actividad investigadora. Estas direcciones son la mejora del concepto de equilibrio conocida como *refinamientos del equilibrio de Nash*, que pretenden mejorar el concepto de solución de un juego buscando reglas razonables para la prescripción de equilibrios. Otra rama trascendental es el estudio de las *situaciones dinámicas* ampliando notablemente las opciones estratégicas de los agentes económicos. Finalmente, cabe referirse a la incorporación de modelos con *información incompleta*, donde los agentes no conocen todas las características o preferencias de sus oponentes. Cada una de estas ramificaciones de la teoría básica, que se presenta en este capítulo, se estudian en los tres capítulos siguientes.

Los juegos se han clasificado tradicionalmente en *juegos cooperativos* y *no cooperativos*. La diferencia radica en las posibilidades de comunicación, negociación y coordinación que se permite a los jugadores. Los juegos no cooperativos son aquellos en los que cada agente actúa siguiendo exclusivamente su propio interés y los jugadores no pueden firmar contratos vinculantes. A medida que ampliamos las posibilidades de cooperación, de comunicación y firma de contratos, los juegos pasan a ser cooperativos. Un elemento central en los juegos cooperativos, o en el enfoque cooperativo a las situaciones de conflicto, es la existencia de un poder superior capaz de hacer cumplir los acuerdos entre las partes en conflicto. Actualmente existen muchos trabajos que intentar desarrollar una justificación no cooperativa de las soluciones cooperativas, integrando las dos ramas.

Los *juegos no cooperativos*, a los cuales dedicaremos todo este capítulo, se pueden subdividir de dos formas distintas. Por un lado, en función del grado de contraposición de intereses de los agentes, podemos hablar de *juegos de suma cero*, o juegos representativos de situaciones estrictamente competitivas, donde los intereses de los agentes están totalmente contrapuestos, o en *juegos de suma no cero*, los más usuales, donde los intereses no son totalmente contrapuestos. Nótese que a pesar del nombre, los juegos de suma cero son un subconjunto de unos juegos más generales, los de suma no cero. Por cuestiones históricas, los juegos más comunes tienen un nombre con connotación de ser la excepción a la regla.

Los juegos no cooperativos pueden también clasificarse en función de cómo se presentan. Así, podemos hablar de *juegos en forma estratégica* (también llamados juegos en forma normal), cuando un juego se define de forma que cada jugador escoge una estrategia (de un conjunto factible) y el conjunto de estrategias escogidas entre todos los jugadores, simultánea e independientemente, determina los resultados y su efecto en cada jugador. Otra presentación es la llamada *forma extensiva del juego*, que describe con gran detalle la secuencia de movimientos de los jugadores y su efecto en ellos.

Los cuatro primeros capítulos de este número, incluyendo esta introducción, se dedicarán a los juegos no cooperativos. Dentro de los capítulos de aplicaciones de la teoría de los juegos, los tres últimos capítulos tendrán también un contenido fundamentalmente no cooperativo. El enfoque cooperativo a las situaciones de conflicto se cubrirá en los otros capítulos de este número, aunque como decíamos antes, hay aspectos cooperativos y no cooperativos que no pueden desligarse y aparecen de forma integrada en algunas partes de este volumen.

Dentro de la teoría de los juegos, podemos hablar de tres enfoques fundamentales que aparecerán, en distinto grado, en los capítulos de este número. Por un lado, tenemos un *enfoque positivo* a la teoría de los juegos que intenta explicar cómo se comportan los agentes enfrentados a una situación competitiva o de conflicto en general. Este enfoque aporta un aspecto descriptivo a la teoría. El segundo enfoque, que será el central en este documento, es el *enfoque normativo* a la teoría, que pretende hacer recomendaciones sobre cómo deberían actuar los jugadores. Es el aspecto prescriptivo de la teoría. Finalmente, tenemos el *enfoque de diseño*, donde actuamos como actores externos al conflicto intentando diseñar unas reglas del juego que ayuden a solucionar el conflicto de intereses entre los participantes.

Este capítulo se organiza de la siguiente forma. La segunda sección introduce los juegos no cooperativos en forma estratégica y el concepto de equilibrio de Nash. La tercera introducirá la forma extensiva de los juegos y algunos resultados específicos a esta presentación de los juegos. La cuarta sección estudia el caso particular de los juegos de suma cero donde los intereses de los jugadores están totalmente contrapuestos. Para estos juegos hay resultados más potentes que para los juegos en general. La resolución de juegos, especialmente de suma cero, se analiza en la siguiente sección. La sección sexta presenta un conciso panorama de otros juegos no cooperativos. Finalmente, la última sección presenta una introducción a los otros capítulos de este número.

Forma estratégica (normal) de un juego

Formalmente, podemos definir un juego como un conjunto compuesto de los siguientes *elementos*:

N:	Conjunto de jugadores. Normalmente consideraremos N finito y escribiremos $N=\{1,2,\ldots,n\}$.
A:	Conjunto de resultados posibles.
$\{\geq_k\}_{k\in N}$:	Preferencias sobre A para cada jugador. Se supone que son relaciones binarias, completas y transitivas.
$\{S^k\}_{k\in N}$:	Conjunto de estrategias (llamadas estrategias puras) del jugador k.

a:S----->A: Regla de selección de resultados. A cada tuple de estrategias $s=(s^1, s^2, ..., s^n) \in S = X_{k \in N} S^K$ (producto de los S^K) le asigna un resultado en A.

Las reglas que controlan el juego son las siguientes:

1. Cada jugador escoge, independiente y simultáneamente, una estrategia $s^k \in S^k$. El resultado correspondiente a las estrategias escogidas viene definido por $a(s^l, s^2, \ldots, S^n) \in A$. Sobre estos resultados, cada jugador tiene unas preferencias, $\{\geq_k\}$, bien definidas.

2. El juego se juega una sola vez.

3. Todos los elementos del juego, así como las reglas, son conocidos por todos los jugadores, todos saben que son conocidos, y así sucesivamente. En la jerga, la definición del juego es de "conocimiento compartido" ("*common knowledge*" en inglés; véase Aumann, 1976, o Milgrom, 1981).

La definición de juego utilizada hasta ahora no es demasiado operativa. Se pueden introducir algunas suposiciones adicionales para transformar los elementos del juego en otros más sencillos. Como primer paso, las preferencias definidas sobre el espacio de resultados inducen unas preferencias sobre el espacio de estrategias según la siguiente equivalencia: Si $s,t \in S$, se cumple:

$$s \geq_K t \Leftrightarrow a(s) \geq_K a(t)$$

Si suponemos por el momento que el juego es *finito*, o sea que tanto N como S son conjuntos finitos, entonces las preferencias sobre el espacio de estrategias puede representarse con funciones de utilidad (o de beneficio) π^k para cada jugador $k \in N$. Esto es:

$$\pi^k: S \text{---->} R \text{ tal que } \pi^k(s) \geq \pi^k(t) \Leftrightarrow s \geq_k t$$

Así pues*, la forma estratégica de un juego finito* es el conjunto formado por:

$$\{N, \{S^k\}_{k \in N}, \{\pi^k\}_{k \in N}\} \quad (1)$$

cuyas reglas de funcionamiento vienen definidas por las tres reglas indicadas anteriormente.

Nota: Nótese que los pagos π^k del juego se derivan de la función de utilidad, por lo que normalmente se expresan en útiles, aunque en muchos ejemplos utilizaremos unidades monetarias. La unidad en que se definan los pagos del juego no tiene excesiva importancia mientras no se consideren transferencias de utilidad de un jugador a otro. En los casos en que el valor absoluto de los pagos se comparen entre jugadores, estaremos añadiendo una suposición suplementaria, que la utilidad entre jugadores es comparable y transferible a la ratio (esto no es relevante) de uno a uno.

Los juegos finitos entre dos jugadores se representan muchas veces como juegos matriciales, donde cada fila representa una estrategia para el jugador I y cada columna una estrategia para el jugador II. En cada celda de la matriz aparecen dos valores, el primero corresponde al pago que recibe el jugador I, y el segundo, al que recibe el jugador II, en caso que los jugadores escojan las estrategias cuya fila y columna determina la celda en cuestión. A modo de ejemplo, consideremos un juego muy sencillo.

Ejemplo 1:

Hay dos jugadores, y cada uno tiene dos estrategias. En términos de nuestra definición (1), el juego es:

$N=\{I,II\}$;

$S^I=\{f_1,f_2\}$;$S^{II}=\{c_1,c_2\}$;

$\pi^I(f_1,c_1)=\pi^{II}(f_1,c_1)=1$;

$\pi^I(f_2,c_2)=\pi^{II}(f_2,c_2)=-1$;

$\pi^I(f_1,c_2)=\pi^{II}(f_1,c_2)= \pi^I(f_2,c_1)=\pi^{II}(f_2,c_1)=0$

Este juego en forma matricial tendría la representación correspondiente a la Figura 1.

Figura 1

Ejemplo 1

	c_1	c_2
f_1	1, 1	0, 0
f_2	0, 0	-1, -1

En este capítulo representaremos los juegos finitos de dos jugadores en forma matricial, ya que esta representación equivalente es mucho más intuitiva.

Con este juego tan sencillo podemos introducir un concepto de solución. Como ya se habrá apreciado, el juego de la Figura 1 es un juego desde la perspectiva de la definición formal, pero en el cual los intereses de los jugadores no están ni tan sólo parcialmente contrapuestos. No hay conflicto en el juego, y por consiguiente todos estaríamos de acuerdo que la única prescripción razonable que se puede hacer a los jugadores es la de recomendar a cada jugador que utilice su primera estrategia y así obtendrán un útil cada uno. La ”solución” es trivial en este juego, porque cada jugador tiene una estrategia que es su mejor estrategia, *independientemente de la estrategia del otro jugador.* Cuando existe una estrategia así para un jugador, decimos que éste tiene una *estrategia dominante.* Parece razonable percibir que los jugadores utilicen su estrategia dominante si tienen alguna en su conjunto de estrategias.

Podemos intentar generalizar un poco esta idea y de esta forma acotar qué prescripciones cumplen unas condiciones razonables que cualquier solución del juego deba cumplir. El concepto utilizado en teoría de juegos para este propósito es el concepto de equilibrio de Nash:

Equilibrio de Nash en estrategias puras: Decimos que un n-tuple de estrategias $s\in S$, una para cada jugador, es un punto de equilibrio de Nash en estrategias puras si para todo jugador $k\in N$ y para toda estrategia $t^k\in S^k$, se cumple:

$$\pi^k(s^1,...s^k,....s^n) \geq \pi^k(s^1,....t^k,...s^n). \qquad (2)$$

La condición impuesta por la ecuación (2) requiere que la estrategia de cada jugador sea *la mejor respuesta* al conjunto de estrategias propuestas por el equilibrio para los otros jugadores. La condición de equilibrio impone como restricción que si se propone a los jugadores que utilicen las estrategias del equilibrio, ningún jugador puede salir ganando desviándose unilateralmente de la prescripción siempre y cuando los otros jugadores cumplan con ella. Parece pues como una condición necesaria que debería cumplir cualquier concepto de solución que queramos imponer.

Para el ejemplo de la Figura 1, la solución prescrita es el único equilibrio del juego. Siempre que todos los jugadores tienen una estrategia dominante, el juego tiene un solo equilibrio, y a éste se le llama *equilibrio en estrategias dominantes.*

El equilibrio en estrategias puras que hemos introducido presenta dos problemas importantes para considerarlo como una solución del juego. Primero, puede existir más de un equilibrio; segundo, puede ser que no exista ningún equilibrio. Para ilustrar estos dos aspectos utilizaremos dos ejemplos:

Ejemplo 2: “La guerra de los sexos”

Una pareja tiene que decidir sobre dónde ir la próxima noche. Mientras que el hombre (jugador I) desea ir a ver un combate de boxeo, la mujer (jugador II) prefiere asistir a la ópera. Por circunstancias accidentales, cada uno de ellos debe decidir ir al boxeo (B) o a la ópera (O) de forma independiente. Como que ambos prefieren ir juntos hagan lo que hagan, las utilidades respectivas que derivan de sus decisiones vienen dadas por la matriz de la Figura 2, donde el jugador I escoge la fila.

Figura 2

La guerra de los sexos

	B	O
B	4, 1	0, 0
O	-1, -1	1, 4

Tal como puede fácilmente comprobarse, el juego representado por la matriz de la Figura 2 tiene dos equilibrios en estrategias puras, correspondientes a ambos jugadores escogiendo B y ambos escogiendo O. Para este juego tiene poco sentido hablar de ”solución”. La multiplicidad de equilibrios es una limitación de la teoría que abre la puerta a todo un campo de investigación sobre cómo escoger entre distintos equilibrios y que se tratará en detalle en el Capítulo II de este número. A pesar de que tendremos criterios para determinar qué equilibrios son razonables, ejemplos como el descrito ilustran que no podemos hablar de solución en juegos en general, ya que ésta no existe. Podemos sólo hablar de equilibrios y calificar algunos de ellos.

Ejemplo 3: "*Matching Pennies*"

Cada uno de los dos jugadores tiene que escoger simultáneamente entre "cara" y "cruz". Si ambos jugadores escogen la misma opción, el jugador I recibe un dólar de parte del jugador II. En caso contrario, el jugador I paga un dólar al jugador II. La matriz correspondiente se presenta en la Figura 3.

Figura 3

Matching Pennies

	Cara	Cruz
Cara	1, -1	-1, 1
Cruz	-1, 1	1, -1

Como puede comprobarse fácilmente, este juego no tiene ningún equilibrio en estrategias puras. Nuestro concepto de equilibrio presenta pues un problema esencial: muchos juegos no tienen ningún equilibrio en estrategias puras. Esto nos obliga a considerar una extensión de nuestro concepto de forma que podamos, al menos, asegurar su existencia en todos los juegos finitos, aunque no podamos, por ahora, solucionar la unicidad.

Definiremos como la *extensión mixta de un juego finito* al conjunto

$$\{N, \{M^k\}_{k \in N}, \{E^k\}_{k \in N}\} \tag{3}$$

donde M^k es el conjunto de estrategias mixtas definido como el conjunto de distribuciones de probabilidad definidas sobre el conjunto de estrategias puras S^k. Esto es:[1]

$$M^k = \{\sigma^k \in R^{|S^k|} : \sigma^k(s_j^k) \geq 0,\ \forall s_j^k \in S^k;\ \Sigma_j\ \sigma^k(s_j^k) = 1\} \tag{4}$$

E^k es una función que nos da la *utilidad esperada para el jugador k* de cada combinación de estrategias mixtas. Esto es:

$$E^k(\sigma^1, \ldots, \sigma^n) = \Sigma_{j1} \ldots \Sigma_{jn}\ \sigma^1(s_{j1}^1) \ldots \sigma^n(s_{jn}^n)\ \pi^k(s_{j1}^1, \ldots, s_{jn}^n) \tag{5}$$

La introducción de estrategias mixtas puede parecer algo artificial, pero en realidad es una extensión natural del concepto de estrategia en un juego. Para entender el significado de esta extensión podemos referirnos de nuevo a nuestro ejemplo 3. Como recordará el lector, en ese juego no existía ningún equilibrio en estrategias puras. La extensión mixta del juego será:

[1] $|S^k|$ representa el cardinal del conjunto S^k, o sea, el número de elementos en el conjunto.

$M^{I}=\{(p,1-p),\ 0\leq p\leq 1\}$

$M^{II}=\{(q,1-q),\ 0\leq q\leq 1\}$

$E^{I}((p,1-p),(q,1-q))=pq-p(1-q)-(1-p)q+(1-p)(1-q)=-E^{II}((p,1-p),(q,1-q))$

Una estrategia mixta en este juego consiste en una asignación de probabilidades a decir cara o cruz en el juego. Si el jugador II consigue saber qué estrategia pura quiere utilizar su oponente, éste puede conseguir ganar el dólar. Sin embargo, si sabe que el jugador I escogerá su estrategia pura a base de escoger según el resultado de una distribución de probabilidad sobre las alternativas (*randomizar*), el jugador II carece de información para explotar al jugador I. Como podrá convencerse el lector, la estrategia óptima para cada jugador en este juego es "*randomizar*" al 50% entre sus estrategias puras. Sólo esta *randomización* deja al contrincante indiferente entre qué estrategia escoger. Esta recomendación determinará el único equilibrio (en estrategias mixtas) para este juego. La estrategia mixta adecuada es una forma de disminuir el peligro del contrincante intentando averiguar cómo explotar los movimientos del otro jugador. En este juego, las estrategias mixtas son una extensión natural de las estrategias puras, ya que corresponde a la forma racional en que todos afrontaríamos este juego.

Es importante remarcar que para aceptar la extensión mixta del juego necesitamos añadir nuevas suposiciones a nuestro modelo básico. Nótese que precisamos utilizar utilidades esperadas que no tienen sentido para funciones de utilidad en general, al menos para las ordinales. Necesitaremos suponer que los axiomas de racionalidad, necesarios para el teorema de la utilidad esperada[2], se cumplen. Si ello es así, entonces la función de utilidad está expresada en útiles tales que un acontecimiento aleatorio es preferible a otro sí, y sólo sí, el valor de la utilidad esperada en el primero es mayor que en el segundo.

Armados con la extensión mixta de un juego, podemos definir un equilibrio de Nash en estrategias mixtas como un equilibrio en estrategias puras de la extensión mixta de juego, considerando dicho juego como un juego con infinitas estrategias. Refraseando la definición para este caso, tenemos:

Equilibrio de Nash en estrategias mixtas: Decimos que un n-tuple de estrategias mixtas $\sigma\in M$, una para cada jugador, es un punto de equilibrio en estrategias mixtas *si para todo jugador $k\in N$, y para toda estrategia $\tau^{k}\in M^{k}$*, se cumple:

$$E^{k}(\sigma^{1},\ldots,\sigma^{k},\ldots,\sigma^{n})\geq E^{k}(\sigma^{1},\ldots,\tau^{k},\ldots,\sigma^{n}) \tag{6}$$

El lector puede comprobar en este momento, utilizando la definición (6), que $p=q=1/2$ es el único equilibrio en estrategias mixtas del juego del ejemplo 3. Por consiguiente, este juego, a pesar de no tener ningún equilibrio en estrategias puras, sí tiene un equilibrio en estrategias mixtas. De hecho, como veremos a continuación, todo juego finito tiene un equilibrio en estrategias mixtas. O sea, con la extensión mixta del juego solucionamos el problema de existencia de los equilibrios en juegos finitos, cuando las utilidades de los jugadores se representan por funciones de utilidad von Neumann-Morgensten.

Para formalizar adecuadamente la existencia del equilibrio, es útil introducir una definición adicional y un par de resultados operativos:

[2] Sobre este tema se puede consultar Herstein y Milnor (1953).

Mejor respuesta: Decimos que una estrategia pura s^k para el jugador k es la mejor respuesta a las estrategias mixtas $\sigma_{-k}=(\sigma^1,...,\sigma^{k-1},\sigma^{k+1},...\sigma^n)$ de los otros jugadores si:

$$s^k \in \operatorname{argmax}_{s \in S^k} E^k(s^k,\sigma_{-k})$$

donde s^k debe interpretarse como una estrategia mixta que asigna probabilidad uno a la estrategia pura s^k y cero a las otras.

Proposición 1

σ es un equilibrio en estrategias mixtas sí, y sólo sí, para todo jugador k, $\sigma^k(s^k) > 0$ implica que s^k es la mejor respuesta a σ_{-k}. O sea, las estrategias de equilibrio asignan probabilidad positiva sólo a aquellas estrategias puras que son mejor respuesta a las estrategias de los otros jugadores.

La prueba es muy sencilla y se deja como ejercicio para el lector. Nótese que si se asigna probabilidad positiva a una estrategia que no es mejor respuesta, puede aumentarse la utilidad esperada repartiendo esta probabilidad entre las estrategias mejor respuesta. Por otro lado, todas las estrategias puras mejor respuesta tienen la misma utilidad esperada. Si no constituyen un equilibrio, la estrategia que rompe el equilibrio debe asignar probabilidad positiva a alguna estrategia pura con un valor esperado superior a la mejor respuesta, lo cual es una contradicción.

Lema 1 (teorema del punto fijo de Brouwer)

Sea C un subconjunto compacto y convexo de R^k, y sea f:C--->C una función continua. Entonces existe un punto x en C tal que x=f(x); x es un punto fijo de la función f en C[3].

Teorema de Nash (Nash, 1950, 1951)

Todo juego finito tiene un punto de equilibrio en estrategias mixtas.

Prueba:

Para todo $\sigma \in M$ defina la función f:M--->M, $\sigma'=f(\sigma)$ dado por:

$$\sigma'(s_j^k)=(s_j^k+\max(0,E^k(\sigma_{-k},s_j^k)-E^k(\sigma)))/\Sigma_i(s_i^k+\max\ (0,E^k(\sigma_{-k},s_i^k)-E^k(\sigma))$$

Es fácil comprobar que f(.) es una función continua y que $f(\sigma) \in M$, ya que:

$$\sigma'(s_j^k)\geq 0 \text{ para todo k y } s_j^k \in S^k,$$

$$\Sigma_j\ \sigma'(s_j^k)=1 \text{ para todo k}$$

Como que M es un subconjunto compacto y convexo de R^z, donde $z=\Sigma_k\ |S^k|$, la función tiene un punto fijo $f(\sigma^*)=\sigma^*$ según el lema 1. El punto fijo satisface que para todo jugador k y para toda estrategia pura s_j^k en S^k se cumple:

$$E^k(\sigma^*_{-k},s_j^k)\leq E^k(\sigma^*)$$

[3] Una prueba del teorema se puede encontrar en Katutani (1941).

Por consiguiente, las estrategias de cada jugador en el punto fijo asignan probabilidad positiva sólo a las estrategias puras mejor respuesta de cada jugador. Por la proposición 1, σ^* es un punto de equilibrio. *

El teorema de Nash nos demuestra la existencia de equilibrio en estrategias mixtas para cualquier juego finito. Adicionalmente, la prueba nos ilustra la construcción de dicho equilibrio como punto fijo de una función que corrige las estrategias de cada jugador en función de su grado de desviación con respecto a la mejor respuesta. Por otro lado, la proposición 1 nos da una idea de cómo operacionalizar la búsqueda de equilibrios a base de considerar las estrategias puras que son mejor respuesta a las estrategias de los oponentes.

Forma extensiva del juego

La forma estratégica de los juegos que hemos comentado hasta ahora presupone que los jugadores escogen sus estrategias independiente y simultáneamente. Podemos pensar en muchos juegos que tienen una estructura secuencial de forma que los movimientos de un jugador van precedidos por los movimientos de otros, o incluso por la resolución de alguna incertidumbre relevante en el problema. Parece pues interesante estudiar una presentación de los juegos que nos permita modelar en detalle la secuencia concreta que tiene lugar en el juego. A tal representación del juego se le denomina forma extensiva, ya que describe extensivamente detalles del juego que se desvanecen en la forma estratégica del mismo. Aunque esta presentación es muy intuitiva, como se verá en los ejemplos, su definición formal es un tanto intrincada.

Forma extensiva de un juego: La forma extensiva de un juego es el conjunto de elementos siguientes:

N:	Conjunto de jugadores.
K:	Arbol conecto y finito con una sola raíz.
$H^0,H^1,\ldots,H^n$:	Una partición de los nudos no terminales del árbol en n+1 conjuntos, donde H^0 corresponde al conjunto de nudos de la naturaleza (incertidumbres) y los otros conjuntos corresponden a los jugadores según su superíndice. Cada conjunto indica quién debe realizar un movimiento en ese nudo, esto es, a quién pertenece el nudo.
P_i:	Una distribución de probabilidad sobre los arcos salientes de cada nudo de la naturaleza (H^0).
$V^k{}_1,\ldots,V^k{}_{nk}$:	Una partición de los nudos del jugador k (para cada jugador) en conjuntos de información $V^k{}_j$ tales que todos los nudos en un mismo conjunto de información tienen el mismo número de arcos (o alternativas) y que cada conjunto de información intersecta cualquier

jugada[4] del juego como máximo en un punto. El jugador k puede distinguir entre los distintos conjuntos de información, pero no entre los nudos que pertenecen a un mismo conjunto de información. Este elemento representa pues la información disponible para el jugador k que se encuentra en un conjunto de información V^k_j.

$(a_1,a_2,...,a_n)$: Un vector de pagos para cada nudo terminal del árbol, indicando la utilidad de cada jugador si el juego termina en ese nudo terminal.

Repasemos por un momento las condiciones incorporadas en la definición del juego. La estructura central del juego es un árbol de características similares a un árbol de decisión. Un árbol es un conjunto de nudos unidos por arcos en el cual no hay ciclos. Para representar un juego, el árbol debe ser conecto y tener un nudo distintivo que llamamos raíz del árbol. Esta raíz es el nudo inicial del juego.

Los nudos del árbol se dividen en dos grupos: los nudos terminales, aquellos que no tienen arcos (ramas) que salgan de ellos, y los nudos no terminales. Cada nudo no terminal es un punto de decisión o de incertidumbre. Si es un nudo de incertidumbre, entonces decimos que pertenece a la naturaleza, y ésta decidirá por cuál de sus ramas salientes continuará el juego utilizando una distribución de probabilidad sobre las alternativas. Estas distribuciones son conocidas por todos los jugadores.

Si el nudo no terminal es un nudo de decisión, entonces debe pertenecer a algún jugador, al que debe decidir en ese momento. Las ramas que salen del nudo son sus alternativas. Con su decisión, el jugador fijará qué nudo seguirá en la jugada concreta que esté teniendo lugar. Pero al decidir, puede darse la circunstancia que el jugador no pueda saber con precisión en qué punto del juego está. Esto se representa a base de agrupar todos aquellos nudos de decisión para cada jugador que es incapaz de distinguir en un mismo conjunto de información.

A estos conjuntos de información les requerimos dos condiciones muy triviales:

1. Que ya que son indistinguibles, todos los nudos de un mismo conjunto de información tengan el mismo número de alternativas o arcos que salen de él y con las mismas etiquetas. De esta forma, las alternativas de decisión en un nudo no revelan información sobre qué nudo del conjunto de información es el nudo desde donde se decide la continuación de la jugada.

2. En una jugada particular del juego, se puede pasar por un nudo de información a lo sumo una sola vez. En caso contrario, al encontrarse de nuevo en un mismo conjunto de información, se podría distinguir el nudo en el que se está.

Finalmente, cualquier jugada acabará en un nudo terminal. A cada nudo terminal se le asigna un vector de utilidades, cuyos elementos corresponden a la utilidad que recibe cada jugador.

El juego se inicia en la raíz del árbol. Los movimientos de cada jugador y la resolución de las incertidumbres determinan el conjunto de arcos que conectan la raíz al nudo terminal que se

[4] Una jugada es una secuencia de movimientos y resoluciones de los nudos de incertidumbre que va desde la raíz del árbol hasta un nudo terminal.

alcance. El conjunto de arcos recorridos constituye una *jugada* del juego. A cada jugada le corresponde un vector de pagos determinado por el nudo terminal de la jugada.

Veamos un par de ejemplos:

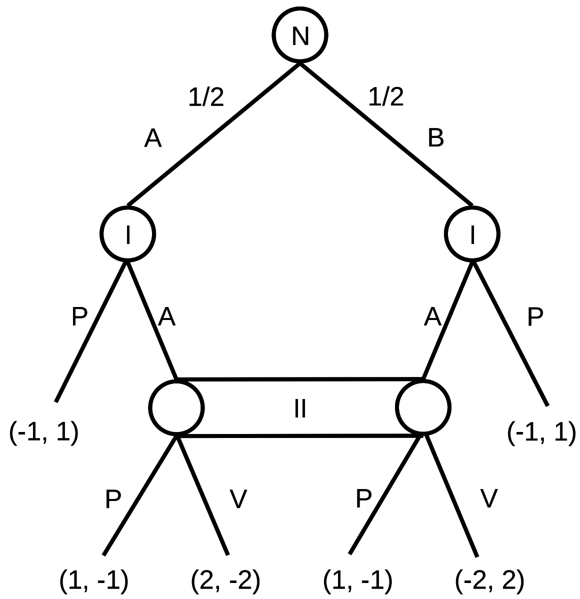
Ejemplo 4:

Hay dos jugadores. Cada jugador pone 100 ptas. sobre la mesa. El jugador I coge una carta que sólo él observa. La carta puede ser alta (A) o baja (B) con igual probabilidad. Una vez vista la carta, el jugador I tiene dos opciones, puede pasar (P) o apostar (A). Si decide pasar, el jugador II recoge el dinero de la mesa. Si decide apostar, el jugador II tiene dos opciones: puede decidir verla (V) o abandonar (A). Si abandona, el jugador I recoge el dinero de la mesa. Si ve la carta, cada jugador debe poner 100 ptas. más sobre la mesa. Si la carta es alta, el jugador I se lleva el pote, mientras que si la carta es baja, el jugador II gana la partida y se lleva el pote.

La representación en forma extensiva de este juego se presenta en la Figura 4. Nótese que el jugador I tiene dos conjuntos de información, con un solo nudo cada uno. La razón estriba en que el jugador I observa el valor de la carta. En cambio, el jugador II, que no observa la carta, tiene un solo conjunto de información, ya que no puede distinguir entre carta alta o baja, aunque sí sabe que el jugador I no ha escogido ”pasar” en su turno en el juego.

Figura 4

Forma extensiva del ejemplo 4 (en unidades de 100 ptas.)

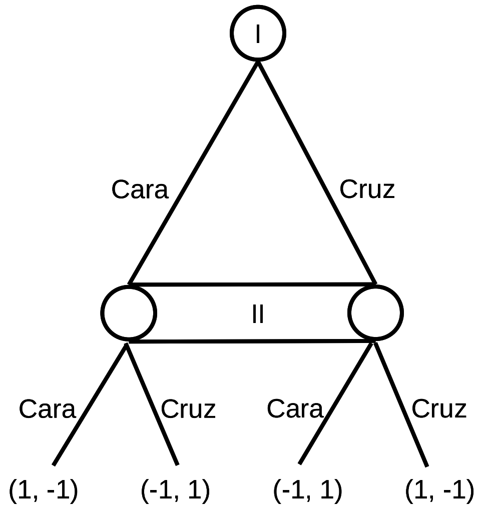


Ejemplo 3 (continuación)

Un juego de elección simultánea como el de ”*matching pennies*” que veíamos en el ejemplo 3 puede representarse en forma extensiva a base de considerar conjuntos de información. La Figura 5 presenta la forma extensiva del juego. Nótese que alternativamente podríamos haber situado el jugador II en la raíz del árbol. Ambos juegos en forma extensiva corresponden al mismo juego en forma estratégica.

Figura 5

Forma extensiva del ejemplo 3



Información perfecta: Decimos que un juego en forma extensiva tiene *información perfecta* si cada conjunto de información está integrado por un *solo* nudo. En juegos de información perfecta, todos los jugadores saben exactamente en qué nudo del árbol están en cualquier momento del juego. En caso contrario, decimos que el juego tiene *información imperfecta*.

Es importante recalcar que hasta este momento hemos indicado que los jugadores tienen alternativas o movimientos posibles en cada conjunto de información. Una *estrategia pura* para un jugador en la forma extensiva del juego será una especificación sobre qué alternativa escoger en cada conjunto de información. Así pues, si el jugador I tiene dos conjuntos de información en el ejemplo 4, con dos alternativas en cada conjunto de información, tendrá cuatro estrategias puras. Un ejemplo de estrategia sería: "Pasar cuando la carta sea baja y apostar si la carta es alta". En cambio, el jugador II tiene sólo dos estrategias puras, ya que tiene un único conjunto de información: puede "pasar" o "verla".

Una forma de pensar en las estrategias puras es considerar que algún agente tiene que ocupar el lugar del jugador. Una estrategia pura es el conjunto de instrucciones que precisa el agente para jugar una sola vez el juego en nombre del jugador. Como es lógico, deberá especificársele qué debe hacer en cualquier situación que pueda encontrarse durante el juego, o sea, en cada posible conjunto de información.

Dado un juego en forma extensiva, se puede pasar a su forma estratégica con el siguiente procedimiento:

1. Hacer una lista de todas las estrategias puras de cada jugador.

2. Calcular el valor esperado para cada jugador para cada par de estrategias puras, una para cada jugador. Como que una estrategia pura indica cómo se debe jugar en cada conjunto de información, un par de estrategias define todas las jugadas posibles en función de los movimientos de la naturaleza. Utilizando las probabilidades de dichos movimientos de la naturaleza, se pueden calcular las utilidades esperadas.

Ejemplo 4 (continuación)

Busquemos la forma estratégica para el juego de cartas del ejemplo 4, en unidades de 100 ptas. Las estrategias puras para el jugador I son:

s1: Pasar con carta baja y alta.

s2: Pasar si la carta es baja, apostar si la carta es alta.

s3: Apostar si la carta es baja, pasar si la carta es alta.

s4: Apostar con carta baja y alta.

Las estrategias puras para el jugador II son "pasar" y "verla". Para ilustrar la forma de calcular los pagos correspondientes, realizaremos un par de cálculos. Supongamos que el jugador I escoge su estrategia s2, y el jugador II, su estrategia "verla". Hay dos estados de la naturaleza con igual probabilidad. Si la carta es baja, con las estrategias indicadas el juego termina cuando el jugador I pasa y pierde I (pagos (-1,1»; si la carta es alta, el jugador I apuesta y el jugador II la ve, por consiguiente el juego termina en (2,-2). Como que ambos estados tienen igual probabilidad, la utilidad esperada para el jugador I es 1/2(-1)+1/2(2) =1/2; como que en este juego las ganancias de 1 son las pérdidas de n, el pago esperado del jugador II es -1/2.

Figura 6

Forma estratégica del ejemplo 4

	Pasar	Verla
s1	-1, 1	-1, 1
s2	0, 0	1/2, -1/2
s3	0, 0	-3/2, 3/2
s4	1, -1	0, 0

De esta forma puede construirse el juego matricial que se muestra en la Figura 6. Es fácil comprobar que el único equilibrio corresponde al jugador I utilizando la estrategia mixta, que asigna una probabilidad de 2/3 a la estrategia s2 y 1/3 a la estrategia s4; el jugador II responde con 1/3 para pasar y 2/3 para verla. La ganancia esperada del jugador I en el equilibrio es 1/3.

El lector puede comprobar que al pasar de la forma extensiva de la Figura 5 a su forma estratégica se obtiene la matriz de la Figura 3.

Desde un punto de vista estratégico, esto es, desde la perspectiva de intentar buscar recomendaciones adecuadas sobre cómo deben jugar los jugadores en un juego, la forma estratégica de un juego es suficiente a pesar de perder información sobre la estructura del juego en relación a la forma extensiva. Definidas las estrategias puras, las estrategias mixtas en un juego en forma extensiva son distribuciones de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras. En consecuencia, es fácil observar que cualquier equilibrio de un juego en forma extensiva coincide con un equilibrio en su forma estratégica, y viceversa. Esta equivalencia de puntos de equilibrio nos permite poder utilizar la forma estratégica de un juego en forma extensiva (después de su transformación) para buscar los puntos de equilibrio de un juego en forma extensiva.

Puede ser necesario un comentario adicional sobre la transformación que tiene lugar al pasar de la forma extensiva a la forma estratégica de un juego. Si los pagos de los jugadores están en útiles, esta transformación requiere que las funciones de utilidad sean von Neumann-Morgenstern para el teorema de la utilidad esperada, ya que al pasar a la forma estratégica calculamos utilidades esperadas.

En los juegos en forma extensiva existe un resultado fundamental que enunciamos a continuación:

Teorema de Zermelo

Todo juego finito en forma extensiva con información perfecta tiene un equilibrio en estrategias puras.

El teorema nos dice que en aquellos juegos finitos en forma extensiva en los cuales todos los conjuntos de información tienen un solo nudo, entonces podemos encontrar un equilibrio en estrategias puras. Este equilibrio es el que se obtiene a base de "plegar" el árbol utilizando inducción hacia atrás. Esencialmente, se trata de utilizar el siguiente proceso inductivo. Empezar por algún nudo cuyos arcos salientes se dirijan a nudos terminales. Si éste es un nudo de decisión de algún jugador, escoger su mejor alternativa. Si es un nudo de incertidumbre, tómese el valor esperado de sus arcos. Sustitúyase el nudo en cuestión por el resultado de las operaciones indicadas. Repítase el proceso hasta llegar a la raíz del árbol. Las alternativas escogidas en cada nudo de decisión constituyen una estrategia para cada jugador. Estas estrategias puras forman un equilibrio (debido a que son la mejor alternativa en cada nudo de decisión, tienen que ser la mejor respuesta y, por tanto, formar un equilibrio). Este proceso siempre puede realizarse sobre un juego con información perfecta y, por consiguiente, este equilibrio siempre existe.

El párrafo anterior muestra los elementos esenciales de la prueba del teorema cuyos detalles para formalizar la inducción no aportan nada nuevo a la intuición de nuestra explicación. Sin embargo, es importante recalcar que el equilibrio obtenido no es ni el único que puede tener el juego, ni tan sólo el más razonable, aunque tal como se verá en el siguiente capítulo, sí cumple unas propiedades interesantes.

De hecho, los juegos de información perfecta son sencillos de jugar. Pero ¿qué ocurre con juegos de información imperfecta? Ya hemos discutido qué entendemos por estrategia pura en este contexto. También hemos comentado que una estrategia mixta es una distribución de probabilidad sobre estas estrategias puras. Sin embargo, ésta es una forma poco intuitiva de jugar. Veamos lo que esto significa en el contexto del ejemplo 4.

La recomendación final para el jugador I, la estrategia de equilibrio, consiste en escoger con probabilidad 2/3 la estrategia s2, y con probabilidad 1/3, la estrategia s4. Eso significa jugar de la forma siguiente. Primero lanzar un dado. Si obtiene un valor entre 1 y 4, entonces juegue el juego como sigue: Si su carta es alta, apueste, y si su carta es baja, pase. En cambio, si el dado da un 5 o un 6, juegue como sigue: Apueste tanto para carta alta como baja. ¿Quién jugaría de esta forma?

Está claro para todos que en este tipo de juego, una estrategia pura nunca nos proporcionará un equilibrio. De hecho, es necesario ”utilizar” la información para sacar provecho de ella, pero no de forma total, pasando siempre que es baja la carta, ya que esta estrategia ”revela” demasiada información. Necesitamos hacer un farol de tanto en tanto, pero no siempre. Por consiguiente, la estrategia de equilibrio requerirá alguna elección aleatoria. Pero la asignación más razonable de probabilidades se haría sobre cada conjunto de información. O sea, el jugador I se sentiría más confortable con una recomendación que le dijera: Si tienes una carta alta, apuesta siempre, y si tienes una carta baja, tira un dado y apuesta sólo si el resultado del dado es un 5 o un 6. Esta recomendación (equivalente a nuestra estrategia de equilibrio) consiste en asignar una distribución de probabilidad sobre las alternativas de cada conjunto de información. En el conjunto de ”carta alta”, la distribución pone todo el peso en la alternativa apostar, mientras que en el otro conjunto de información, la distribución es 1/3 apostar y 2/3 pasar.

Ya que esta forma de jugar es más natural que las estrategias mixtas, parece necesario formalizarla un poco. Para ello definiremos este tipo de estrategias ”aleatorias”, que se conocen como *estrategias de comportamiento.*

Estrategia de comportamiento: Para un jugador, una estrategia de comportamiento asocia a cada conjunto de información una distribución de probabilidad sobre sus alternativas. Así pues, una estrategia de comportamiento es un conjunto de distribuciones, tantas como conjuntos de información tiene el jugador.

La pregunta clave, una vez se han descubierto dos formas distintas de pensar en estrategias –estrategias mixtas y estrategias de comportamiento–, es si estas dos formas son equivalentes, en el sentido de poder obtener los mismos resultados cualquiera que sea nuestra forma de pensar en la estrategia. Para poder dar una respuesta precisa a esta pregunta, necesitamos otra definición.

Memoria perfecta: Un juego en forma extensiva tiene *memoria perfecta* (“*perfect recall*”) si cada jugador recuerda todos sus movimientos en el juego y toda la información obtenida hasta cualquier punto del juego en que tenga que decidir.

Esta definición implica que si dos jugadas cruzan un mismo conjunto de información de un jugador, estas dos jugadas han pasado por los mismos conjuntos de información de este jugador antes de llegar al actual. En caso contrario, como que los nudos de un conjunto de información son indistinguibles, si la historia observada por el jugador pudiera ser distinta al llegar a ese nudo de información, debería darse el caso que el jugador “olvidara” algunos aspectos de la historia, de ahí el nombre de memoria perfecta o imperfecta.

Sea β^i una estrategia de comportamiento del jugador i, sea σ^i una estrategia mixta del mismo jugador que se obtiene a partir de la estrategia de comportamiento a base de buscar la distribución de probabilidad sobre las estrategias puras inducidas por las distribuciones sobre las alternativas de cada conjunto de información contenidas en la estrategia de comportamiento β^i. Contrariamente, a partir de una estrategia mixta σ^i, podemos calcular las probabilidades condicionales sobre las alternativas de cada conjunto de información inducidas por la estrategia, obteniendo una estrategia de comportamiento. La pregunta que nos hacemos es si este proceso β^i, transformándose en σ^i, es invertible, lo que implicaría equivalencia entre estrategias de ambos tipos. El resultado básico es el siguiente:

Teorema de Kuhn

Si un juego finito en forma extensiva tiene memoria perfecta, entonces si a partir de una estrategia de comportamiento β^i obtenemos una estrategia mixta σ^i, a partir de esta estrategia mixta calculamos las probabilidades condicionales sobre las alternativas en cada conjunto de información, generando una nueva estrategia de comportamiento β'^i, entonces $\beta^i=\beta'^i$. Si, por el contrario, a partir de σ^i calculamos una estrategia de comportamiento β^i, y a partir de ésta generamos una estrategia mixta σ'^i, entonces σ^i y σ'^i difieren a lo sumo en un conjunto de información irrelevante, esto es, en un conjunto de información que tiene probabilidad cero de alcanzarse con dichas estrategias.

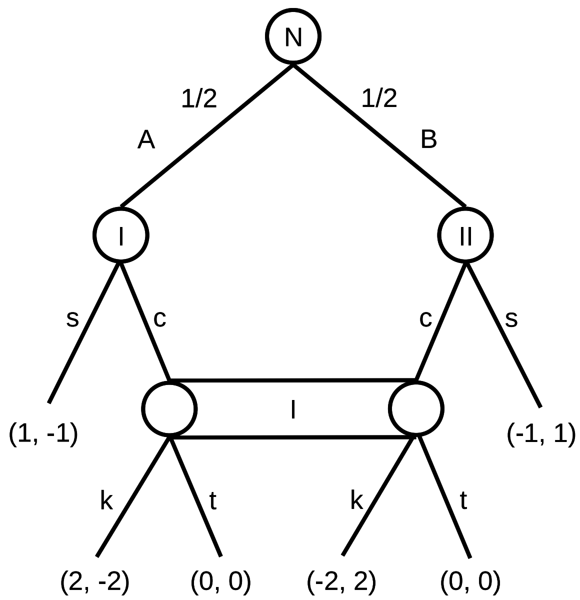
Esencialmente, este teorema, cuya prueba no incluimos[5], nos dice que las estrategias de comportamiento y mixtas son "equivalentes" en juegos con memoria perfecta. La prueba del teorema no es muy complicada, aunque requiere bastante notación para ser precisos en los términos utilizados. Sin embargo, un ejemplo puede ilustrar la problemática asociada a los juegos con memoria imperfecta, que, en todo caso, son poco comunes.

Ejemplo 5: juego sin memoria perfecta

Considérese el juego en forma extensiva de la Figura 7. Como puede observarse, el jugador I tiene dos conjuntos de información. Pero si se alcanza el segundo conjunto de información, el jugador I no recuerda si lo alcanzó después de haber escogido la alternativa c en su primer conjunto de información o ha llegado como consecuencia de la elección del jugador II. Se puede pensar en este juego como si hubieran dos agentes incomunicados, uno en cada conjunto de información, que actúan en nombre del jugador I. La forma estratégica del juego se presenta en la Figura 8.

Figura 7

Forma extensiva del ejemplo 5



[5] Una prueba del teorema puede encontrarse en Kuhn (1953) o Kuhn y Tucker (1953).

Figura 8

Forma estratégica del ejemplo 5

	s	c
s-t	0, 0	1/2, -1/2
s-k	0, 0	-1/2, 1/2
c-t	-1/2, 1/2	0, 0
c-k	1/2, -1/2	0, 0

Recuérdese que una estrategia de comportamiento está formada por una distribución de probabilidad sobre las alternativas en *cada* conjunto de información. Para este juego, una estrategia de comportamiento β^i puede representarse por dos números (a, b), donde $0 \leq a,b \leq 1$; **a** corresponde a la probabilidad de escoger "c", mientras que **b** corresponde a la probabilidad de escoger "k", en los conjuntos de información respectivos.

Si β^i = (a, b), la estrategia mixta inducida es σ^i= ((1-a) (1-b), (1-a)b, a(1-b), ab), siendo cada valor la probabilidad de una fila en el orden de la Figura 8. Se puede comprobar que cualquier estrategia de comportamiento induce alguna estrategia mixta, esto es, lo que se pueda hacer descentralizadamente (estrategias de comportamiento), también puede hacerse centralizadamente (estrategias mixtas).

Sin embargo, considérese la estrategia mixta σ^i = (1/2,0,0,1/2) correspondiente a asignar una probabilidad 1/2 a la primera y última estrategia pura (s-t y c-k). Es fácil comprobar que no existe ninguna estrategia de comportamiento capaz de inducir esta estrategia mixta. Cualquier estrategia de comportamiento que pudiera inducir σi deberla ser el resultado del sistema siguiente:

$$(1-a)(1-b) = 1/2$$

$$(1-a)b = 0$$

$$a(1-b) = 0$$

$$ab = 1/2$$

Pero este sistema no tiene solución. Por consiguiente, a base de decidir centralizadamente, podemos conseguir resultados (en este caso mejores) que no podemos conseguir descentralizadamente, y se rompe la equivalencia. La razón es muy intuitiva, al centralizar podemos coordinar a los dos agentes. Sin esta coordinación, el máximo pago esperado para el jugador I es cero. En cambio, al centralizar se puede coordinar a los dos agentes y la estrategia mixta indicada σ^i (estrategia de equilibrio en la forma estratégica del juego) asegura un valor esperado de 1/4 >0.

Juegos de suma cero con dos jugadores

Los juegos de suma cero son un subconjunto especial de los juegos en los cuales los intereses de los jugadores están completamente contrapuestos. Dadas sus características específicas, se puede ser mucho más preciso sobre la "solución" del juego en comparación con los juegos en general. Por esta razón, junto a una cierta tradición histórica, es conveniente dedicar una sección a estudiar juegos de suma cero con dos jugadores.

Un juego de suma cero con dos jugadores se caracteriza porque los pagos del jugador II son los opuestos a los pagos del jugador I[6]. Formalmente, si el juego se representa por los conjuntos de estrategias S^I y S^{II}, y los pagos π^I y π^{II}, entonces se cumple que $\pi^I = -\pi^{II}$. Dada esta característica, el juego puede representarse en forma matricial con una única matriz de números, A, correspondientes a los pagos que recibe el jugador I. Como los pagos del otro jugador son opuestos, podemos considerar que el jugador I desea *maximizar* los pagos en A, mientras que el jugador II desea *minimizar*.

Considérese que el jugador I tiene m estrategias puras y el jugador II tiene n estrategias puras. La matriz A será una matriz mxn. Sea $p^T = (p_1,P_2,\ldots,P_m)$ un vector representativo de una estrategia mixta genérica para el jugador I, donde el superíndice T significa "transpuesta". Similarmente, $q^T = (q_1,q_2,\ldots,q_n)$ es una estrategia mixta para el jugador II. El pago esperado para el jugador I, si utilizan estrategias p y q respectivamente, es:

$$E^I(p,q)=p^TAq=\Sigma_i p_i \Sigma_j q_j a_{ij} \tag{7}$$

El jugador I intentará escoger p para maximizar la expresión en (7), mientras que el jugador II intentará minimizarla. Supongamos que el jugador I es pesimista y razona de la siguiente forma. Escoja la estrategia que escoja, el jugador II reaccionará escogiendo aquella estrategia que minimice la expresión en (7) dada mi estrategia p. Por consiguiente, lo mejor que puedo hacer es escoger la estrategia p, que cuando II minimice en q me dé el máximo resultado. Esta estrategia "pesimista" es la estrategia *Maximin* del jugador I. El valor esperado correspondiente es un valor que el jugador I puede asegurarse incluso en el peor de los casos. De la misma forma puede actuar el jugador II. Estas actuaciones generan las siguientes definiciones:

Valor y estrategia Maximin para el jugador I

El valor Maximin para el jugador I viene dado por:

$$\underline{v} = \mathrm{Max}_p\ \mathrm{Min}_q\ p^TAq$$

La estrategia Maximin para el jugador I es:

$$p^* \in \mathrm{argmax}_p\ \mathrm{Min}_q p^TAq$$

---

6 Aunque hablamos de juegos de suma cero, los teoremas y comentarios aplican para todos los juegos de suma constante, o sea, tales que $\pi^I+\pi^{II}$ = constante.

Valor y estrategia Minimax para el jugador II

El valor Minimax para el jugador II viene dado por:

$\bar{v} = \text{Min}_q \, \text{Max}_p p^T Aq$

La estrategia Maximin para el jugador I es:

$q^* \in \text{ argmin}_q \, \text{Max}_p p^T Aq$

Vale la pena hacer notar que estos conceptos pueden definirse de forma paralela para juegos de suma no cero. Cada jugador tendrá en cuenta *exclusivamente* su propia matriz de pagos al calcular el valor y las estrategias Maximin correspondientes. Sin embargo, los teoremas que derivamos a continuación son específicos de juegos de suma cero.

Proposición 2

El valor Maximin es menor o igual al valor Minimax para todo juego de suma cero, esto es:

$\bar{v} \geq \underline{v}$

Prueba

Sea $F(q) = \text{Maxp}_p{}^T Aq$ y q^* la estrategia Maximin que minimiza F(q). Para todo p' y q se cumple:

$P'TAq \leq F(q)$

Minimizando en q, en ambos lados tenemos:

$\text{Minq}p'TAq \leq \text{MinqF}(q) = -v$ para todo p'

y si ahora maximizamos en ambos lados de la desigualdad, obtenemos:

$\underline{v} = \text{Max}_p \, \text{Min}_q p'^T Aq \leq \bar{v}$ *

Teorema del Minimax (von Neumann)

Cada una de las siguientes condiciones implica las otras dos:

c1: Un equilibrio existe

c2: $\bar{v} = \underline{v} = v$ (llamado valor del juego)

c3: Existe un número real v y un par de estrategias p^* y q•, una para cada jugador tal que

a) $(p^{*T}A)_j \geq v$ para $j=1,2,\ldots,n$ (p^* es la estrategia Maximin para el jugador I)

b) $(Aq^*)_i \leq v$ para $i=1,2,\ldots,m$ (q^* es la estrategia Minimax para el jugador II)

Prueba (véase también Owen, 1967)

(c1 ---> c2): Sea p* y q* un punto de equilibrio. Como cada estrategia debe ser la mejor respuesta a la del oponente, debe cumplirse:

a) (a) p*TAq* =MaxppTAq*

b) (b) p*TAq* =Minqp*TAq

Esto implica las siguientes desigualdades:

$$\underline{v}=Max_p\ Min_q p^T Aq \geq Min_q p^{*T} Aq = p^{*T} Aq^* = Max_p p^T Aq^* \geq Min_q\ Max_p p^T Aq = \bar{v}$$

Por la proposición 2 tenemos que $\bar{v} \geq \underline{v}$, y por consiguiente, $\bar{v} = \underline{v}$.

(c2 ---> c3): Tómese como número real $v = \bar{v} = \underline{v}$, iguales por hipótesis inicial. Como estrategias p* y q* tómense las estrategias Maximin y Mínimas, respectivamente. Entonces, para toda estrategia pura j del jugador II y estrategia pura i del jugador I, se cumple:

$$(p^{*T}A)_j \geq Min_q p^{*T} Aq = Max_p\ Min_q p^T Aq = v = Min_q\ Max_p p^T Aq = Max_p p^T Aq^* \geq (Aq^*)_i$$

con lo que tanto a) como b) de c3 quedan probados.

(c3 --->c1): Para todo p y q, las condiciones a) y b) de c3 implican:

$$p^{*T} Aq \geq v \geq p^T Aq^*$$

Escójase q=q* y p=p*, y obtenemos (teorema del Sandwitch) que v= $p^{*T}Aq^*$. Por consiguiente:

$p^{*T} Aq \geq p^{*T} Aq^*$ (q* es la mejor respuesta a p*)

y

$p^{*T} Aq^* \geq p^T Aq^*$ (p* es la mejor respuesta a q*)

Por lo que (p*,q*) es un punto de equilibrio. *

La existencia de equilibrio estaba asegurada por el teorema de Nash. En consecuencia, el teorema del Minimax nos caracteriza este equilibrio para juegos de (dos personas) suma cero. Por un lado, ya que los valores Minimax y Maximin son únicos, existe un *valor del juego*, v, que coincide con ambos valores, Minimax y Maximin, tal que todo equilibrio del juego tiene los mismos pagos esperados (v,-v). Además, los jugadores tienen *estrategias óptimas* tales que todo apareamiento de una estrategia óptima para cada jugador es un punto de equilibrio. Estas estrategias óptimas son las estrategias Maximin y Mínimas, respectivamente.

Los juegos de suma cero cumplen la condición que todos sus puntos de equilibrio son *equivalentes* (mismo valor v) e *intercambiables* (cualquier par de estrategias óptimas es un equilibrio). En estos casos decimos que el *juego es resoluble*. Los juegos de suma cero son *resolubles*. En cambio, los juegos de suma no cero no son resolubles, excepto para casos particulares, por ejemplo, si sólo tienen un punto de equilibrio.

Juntando los resultados del teorema de Zermelo y el del Minimax, tenemos:

Corolario 1

Todo juego finito de dos personas de suma cero con información perfecta es determinista.

Por el teorema de Zermelo, un juego con estas características tiene un equilibrio en estrategias puras. Por el teorema del Minimax, todos los equilibrios tienen el mismo valor. En consecuencia, el resultado del juego está determinado por la estrategia pura de equilibrio. Por ejemplo, el juego del ajedrez tiene información perfecta y es de suma cero. En consecuencia, está determinado, en el sentido que existe una estrategia pura para cada jugador tal que su utilización, haga lo que haga el otro jugador, asegura o bien la victoria para las blancas o para las negras o siempre tablas. La dificultad de saber el resultado radica en la complicación de la estrategia pura dado el número inmenso de conjuntos de información; con suficiente potencia de cálculo, el ajedrez podría perder su atractivo actual al no ser más que un juego determinista.

Resolución de juegos

En esta sección intentaremos dar unas pinceladas a algunas técnicas útiles para la resolución de juegos, con un énfasis especial en los juegos de suma cero, por ser éstos los juegos resolubles. Para los juegos de suma no cero, veremos algunas formas de calcular las estrategias y valores Maximin para cada jugador, así como alguna recomendación para encontrar los puntos de equilibrio del juego. Aunque algunas técnicas son generalizables, en esta sección nos referiremos a juegos con dos jugadores. Una buena referencia en este tema son Dresher (1981) y Jones (1980).

1. Programación lineal para el cálculo de valores y estrategias Maximin

Sea A la matriz de pagos del jugador (que escoge la fila) para el cual queremos calcular su estrategia conservadora Maximin, y el consecuente valor de seguridad Maximin para este jugador, haga lo que haga su (o sus) oponentes. Sea el vector p una estrategia mixta genérica y sea v un escalar. Como que nos imaginamos que los otros jugadores actuarán para minimizar el pago esperado de este jugador, el programa lineal a resolver es el siguiente:

$$\mathrm{Max}_p v$$

Sujeto a:

i) $(v,\ldots,v) - p^T A \leq (0,\ldots,0)$

ii) $p \geq 0$

iii) $\Sigma_i p_i = 1$

Donde las restricciones ii) y iii) aseguran que p es una distribución de probabilidad. La restricción i) es la más interesante; asegura que el valor esperado de cada columna (que escoge el otro jugador) para el jugador que escoge la fila sea no inferior a v. En caso contrario, al escoger esta columna, el otro jugador no permite al jugador fila asegurarse el valor v.

El resultado de este programa lineal será la estrategia Maximin y el valor Maximin para el jugador que escoge la fila. Es importante recalcar, que si el juego es de suma no cero, el cálculo del valor y estrategia Maximin debe hacerse para cada jugador *utilizando su propia matriz de pagos*. Es evidente que para juegos de suma no cero, las estrategias Maximin no son necesariamente estrategias de equilibrio.

Si el juego es de suma cero, el valor Minimax para el jugador II podría obtenerse con el siguiente programa lineal:

$\text{Min}_q\ u$

Sujeto a:

i) $(u,\ldots,u)^T - Aq \geq (0,\ldots,0)^T$

ii) $q \geq 0$

iii) $\Sigma_j\ q_j = 1$

Como que es fácil comprobar que este programa es el dual del anterior, los valores Maximin y Minimax deben coincidir, con lo que esencialmente tenemos una prueba alternativa del teorema del Minimax.

2. Equilibrios en estrategias puras

En juegos de suma cero es conveniente comprobar primero si existe algún equilibrio en estrategias puras. El mecanismo para hacerlo es muy sencillo y se basa en comprobar si el Minimax y el Maximin en estrategias puras coinciden. Para ello se busca el mínimo valor de cada fila de la matriz A y se escoge el máximo entre estos mínimos. El valor resultante es el Maximin en estrategias puras. Igualmente, se calcula el valor máximo de cada columna y se escoge el mínimo entre ellos. Este es el valor Minimax en estrategias puras. Si ambos valores coinciden, tenemos un equilibrio en estrategias puras correspondiente a la fila y columna donde se han hallado los valores correspondientes. Decimos entonces que tenemos un *punto de silla*, ya que es el mínimo de la fila y el máximo de la columna simultáneamente. En caso contrario, no existe equilibrio en estrategias puras (véase Figura 10).

3. El concepto de dominancia

Decimos que una *estrategia pura está estrictamente dominada* si se puede encontrar otra estrategia para ese jugador que es estrictamente mejor para cualquier estrategia que utilice el otro jugador. En esas circunstancias, la estrategia dominada no puede nunca formar parte de la mejor respuesta a ninguna estrategia del oponente, por lo que nunca podrá formar parte del equilibrio. Por consiguiente, podemos eliminar esta estrategia del juego para buscar los puntos de equilibrio.

Cuando una estrategia es no peor, pero no estrictamente mejor, que otra estrategia, entonces decimos que esta última está *débilmente dominada* por la anterior. En juegos de suma cero podemos eliminar también las estrategias débilmente dominadas en la búsqueda de equilibrios. No así en juegos de suma no cero si es que queremos obtener todos los equilibrios. La razón estriba en que puede existir un equilibrio que utilice estrategias débilmente dominadas. En juegos de suma cero, debido a que los equilibrios son equivalentes, no hay pérdida de generalidad por evitar equilibrios con este tipo de estrategias, ya que siempre hay algún equilibrio que no utiliza estrategias dominadas. Sin embargo, en juegos de suma no cero, los equilibrios no son intercambiables y, por consiguiente, a pesar de existir al menos otro equilibrio que no utiliza estrategias dominadas, podemos perder algún equilibrio si eliminamos estas estrategias.

Llamaremos *dominancia amplia* al proceso reiterativo de eliminar filas y columnas que resulten dominadas después de haber eliminado otras en el paso anterior. De nuevo, la aplicación de este principio no genera problemas en juegos de suma cero, pero nos puede hacer perder algún equilibrio en juegos de suma no cero.

Finalmente, podemos eliminar alguna estrategia que esté dominada por una combinación convexa de otras estrategias puras, esto es, eliminamos estrategias puras dominadas por estrategias mixtas que utilizan otras estrategias puras. Este tipo de dominancia recibe el nombre de *dominancia ponderada*. Si la dominancia no es estricta, los mismos comentarios anteriores se aplican para juegos de suma no cero.

La ventaja de utilizar los conceptos de dominancia radica en disminuir la dimensión del problema que intentamos resolver. Por ese motivo es aconsejable que una vez comprobada la existencia o no de equilibrios en estrategias puras, se utilice el concepto de dominancia iterativamente hasta reducir al máximo el tamaño del juego (véanse Figuras 9 y 10). A partir de aquí, para juegos de suma cero existen un conjunto de técnicas, aparte de la programación lineal, que permiten resolver el problema.

Para juegos de suma no cero se acaban pronto las recomendaciones. Una forma sistemática de encontrar todos los equilibrios consiste en desarrollar los valores esperados de cada jugador en función de las estrategias de todos los jugadores. Esta expresión es lineal en sus propias estrategias. Esto implica que su maximización, dadas las estrategias del otro jugador, es relativamente sencilla. La ”gracia” en la búsqueda de equilibrios consistirá en saber buscar de forma sistemática el conjunto de estrategias para cada jugador tal que una es mejor respuesta de la otra, esto es, cada estrategia maximiza la expresión del valor esperado para el jugador, dada la estrategia del otro jugador. Este proceso es sencillo para juegos con pocas estrategias, pero se hace muy tedioso si el número de estrategias es grande. La técnica de igualación que vamos a ver a continuación para juegos de suma cero puede ser útil en algunas circunstancias para juegos de suma no cero.

4. La técnica de igualación

En un juego, cada jugador intenta maximizar su beneficio esperado. En un punto de equilibrio, cada jugador está maximizando su beneficio y no hay incentivos a desviarse unilateralmente. Supóngase que en algún equilibrio, un jugador (digamos el jugador I) utiliza una estrategia mixta. Esto implica que cada una de las estrategias puras utilizadas debe ser mejor respuesta a la estrategia del otro jugador. Para que éste sea el caso, la estrategia del jugador II debe igualar el valor esperado de todas las estrategias puras que utiliza el jugador I en el equilibrio. Esta simple observación es muy útil para resolver juegos. Veamos un ejemplo.

Considérese el juego de suma cero representado en la Figura 9. El primer paso en la resolución del juego es ver si hay estrategias dominadas. Claramente, la estrategia c3 está dominada por la columna c1. Una vez eliminada, la fila f3 está dominada por la fila f2 (y la f1). Eliminada esta fila, el juego queda reducido a una matriz de 2x2 que se presenta en la Figura 10. A continuación comprobamos si existe algún equilibrio en estrategias puras. Los valores Minimax y Maximin (en estrategias puras) correspondientes aparecen indicados en la Figura. Como no coinciden, concluimos que no hay ningún equilibrio en estrategias puras. Ahora podemos utilizar la igualación.

Figura 9

Juego de suma cero

	c1	c2	c3
f1	3	1	4
f2	2	4	3
f3	1	1	5

Figura 10

Juego simplificado con dominancia

	c1	c2	
f1	3	1	1
f2	2	4	2 Maxmin
	3 Minmax	4	

Sea (p,1-p) la estrategia mixta del jugador I y (q,1-q) para el jugador II. Utilizaremos v para denotar el valor del juego. Por igualación tenemos:

$3p+2(1 -p) = p+4(1-p) = v$

$3q+(1-q) = 2q+4(1-q) = v$

Resolviendo estas ecuaciones, obtenemos las estrategias óptimas y el valor del juego:

$p^*=1/2; q^* = 3/4; v = 5/2$

Unas notas adicionales a tener en cuenta en la resolución de juegos de suma cero son las siguientes:

1. Para aquellas filas (columnas) que la estrategia óptima no utilice en el equilibrio, debe cumplirse que su valor esperado sea menor (mayor) que el valor del juego.

2. El número de estrategias puras con probabilidad positiva en la estrategia óptima es menor o igual que el rango de la matriz A.

3. Para el caso de un juego de 2x2, el valor del juego viene dado por el determinante de la matriz dividido entre la diferencia entre la suma de los valores en la diagonal positiva y la suma de los valores en la diagonal negativa.

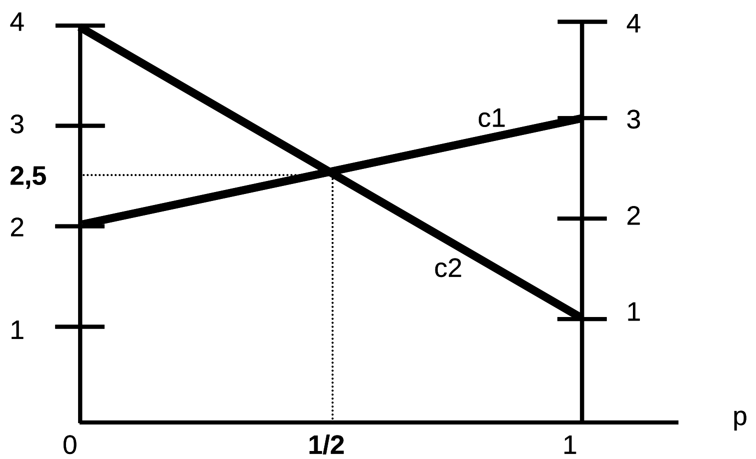
5. Otros métodos

Existen otros métodos o conceptos menos prácticos para resolver juegos de suma cero, que comentamos sólo brevemente. Es aconsejable que el lector haga una comprobación práctica sobre su comprensión de estos conceptos, lo que le servirá para completar la asimilación de lo expuesto en este capítulo:

1. Si un juego tiene sólo dos filas (o dos columnas) y no existe un equilibrio en estrategias puras, se puede representar el valor esperado de cada columna (fila) del juego como una recta según el valor de p, la probabilidad asignada a la primera fila (columna). Representadas todas las rectas, se toma la envolvente inferior (superior), o sea, el mínimo (máximo) de estas rectas. Esto representa la reacción del jugador II (I) a cada estrategia p del jugador I (II). Por consiguiente, la p óptima será el valor de p que obtenga el valor máximo (mínimo) en dicha envolvente. El valor que tome la envolvente en ese punto será el valor del juego. Las estrategias puras que el otro jugador utiliza en la estrategia mixta de equilibrio corresponden a las dos (o más en casos degenerados) rectas que se cruzan en el punto correspondiente al valor del juego. La resolución gráfica para la matriz de la Figura 10 se representa en la Figura 11.

Figura 11

Representación geométrica de las estrategias



2. Un juego de suma cero es *simétrico* si la matriz A es antisimétrica, o sea, la matriz A coincide con la opuesta de su transpuesta ($A=-A^T$). Todo juego simétrico tiene valor cero.

3. Sea A un juego de suma cero. Si sumamos un valor c a todos los elementos de la matriz o multiplicamos por un escalar t positivo, el juego resultante es estratégicamente

equivalente, en el sentido que las estrategias óptimas de ambos juegos coinciden. Si A' = tA+c, entonces el valor del juego A' es:

val (A') = t val (A) +c

Otros juegos no cooperativos

El objetivo de esta sección es introducir, de una forma muy concisa, otros juegos no cooperativos que son una extensión de los juegos analizados hasta el momento. El primer tema que trataremos son juegos con un número infinito de estrategias[7]. Veamos un ejemplo ilustrativo de la problemática asociada a estos juegos[8].

Ejemplo 6: juegos con un número infinito de estrategias

Tenemos dos jugadores. Cada jugador debe escoger un número natural cualquiera. Sea N el número que escoge el jugador I, y M el escogido por el jugador II. Si N es mayor que M, el jugador I recibe 100 ptas. del jugador II, mientras que si N es menor que M, el jugador II recibe las 100 ptas. del jugador I; en caso de empate no se produce ningún pago. Este es un juego de suma cero con infinitas estrategias para cada jugador.

Una estrategia mixta para el jugador I es una secuencia $x=(x_1,x_2,...)$ que cumpla que la suma infinita de los x_i valga 1, siendo cada x_i no negativo. Con esta notación es fácil probar:

1. Toda estrategia mixta es inadmisible, ya que está dominada por otra estrategia mixta. Dada una estrategia mixta x cualquiera, la estrategia mixta $x' = (0,x_1,x_2,...)$ domina a la anterior.

2. No existe valor del juego. De hecho, el jugador I no puede asegurarse ningún valor superior a -100, y el jugador II inferior a 100, ya que al ser convergente, la suma de los x_i, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un K suficientemente grande tal que la suma de K a infinito de los x_i es menor que ε. Una estrategia del jugador II que escoja un número mayor que K es una respuesta que tiene como valor esperado para el jugador I $(1-\varepsilon)(-100) + \varepsilon\ 100$. De la misma forma para el jugador II.

Este sencillo ejemplo ilustra cómo los juegos con un número infinito de estrategias pueden no tener ningún punto de equilibrio. Sin embargo, sí existen algunos resultados generales para juegos de suma cero donde el conjunto de estrategias de cada jugador es el intervalo [0,1]. Para este caso tenemos:

1. Si las funciones de pagos son continuas, el juego tiene valor y los jugadores estrategias óptimas.

2. Si las funciones de pagos son discontinuas pero acotadas, existen estrategias ε-óptimas, que aseguran al jugador un valor a una distancia ε del valor del juego.

---

[7] Sobre juegos infinitos puede consultarse Glicksberg y Gross (1950), Jones (1980) o Karlin (1959).

[8] Otro ejemplo de no equilibrio puede encontrarse en Sion y Wolfe (1957).

3. Si las funciones de pagos son estrictamente convexas, las estrategias óptimas son estrategias puras (véase Nikaido e Isoda, 1955).

Otros juegos que tienen normalmente valor son los *juegos secuenciales*, en los cuales las acciones de los jugadores afectan sus pagos y controlan el próximo juego o juegos en la secuencia. Un tipo de juegos secuenciales son los juegos *estocásticos*[9], caracterizados porque cada celda del juego contiene el pago al jugador I más la probabilidad de terminar el juego (siempre es positiva) y las de continuar con el mismo juego u otra matriz de características similares. Estos juegos se resuelven normalmente truncándolos y tomando límites.

Otra familia de juegos secuenciales son los *juegos recursivos*[10], que difieren de los anteriores en que no se incurre en ningún pago hasta el final del juego, y que la probabilidad de terminar no es siempre positiva. El valor del juego es un punto fijo de la recursión implícita en el juego.

Finalmente, tenemos los llamados *juegos de supervivencia*[11], consistentes en repetir un mismo juego hasta que uno de los jugadores se arruina. Se resuelven transformándolos en juegos recursivos.

Merecen mencionarse en esta sección los llamados *juegos diferenciales*[12], donde cada jugador tiene una función de control sobre un estado del sistema, en un intervalo temporal, que afecta a los pagos de los jugadores. Su resolución utiliza ecuaciones diferenciales, y de ahí se deriva el nombre de los juegos.

Este pequeño resumen es sin duda incompleto dentro de la extensa familia de juegos y combinaciones de ellos, que se han estudiado tanto en matemáticas y biología como en economía y otras ciencias sociales. En la próxima sección, que sirve de introducción al resto de los temas que se cubrirán en este número de *Cuadernos*, mencionaremos entre otras cosas las dos extensiones más naturales de los juegos no cooperativos cuya no inclusión en este resumen puede sorprender al lector: los *juegos repetidos* y los *juegos con información incompleta.*

Presentación de este volumen

En esta introducción hemos explicado el concepto de equilibrio de Nash. Sin embargo, hemos observado que los juegos de suma no cero, los más comunes, pueden tener más de un equilibrio. La búsqueda de criterios razonables para la selección de equilibrios dentro de esta multiplicidad es un tema que ha tenido un gran desarrollo, especialmente en los últimos años. El tema es claramente importante para poder ser más preciso en las predicciones normativas de la teoría y más conclusivo en su aplicación en los modelos económicos. Nótese que no poder ser más preciso sobre la selección de equilibrios es una clara limitación de la teoría, ya que el equilibrio es nuestro concepto básico de solución. Los avances más importantes en esta área, conocida por *refinamientos del equilibrio de Nash*, se presentan en el capítulo II.

---

[9] Sobre juegos estocásticos puede consultarse Shapley (1953), Gilletle (1957) o Sobel (1971).

[10] Sobre juegos recursivos, véase Everett (1957).

[11] Sobre juegos de supervivencia, véase Jones (1980).

[12] Sobre juegos diferenciales, véase Friedman (1971).

Mencionábamos en la sección anterior que la repetición del juego era un elemento importante que no estaba desarrollado en este capítulo. La repetición de una situación competitiva abre un gran número de posibilidades estratégicas a los jugadores que no están presentes en la versión estática de los juegos. Cabe añadir que la realidad de las relaciones económicas y competitivas en general tiene un alto ingrediente dinámico cuyo efecto estratégico no puede menospreciarse. Dada su relevancia, el Capítulo III estará dedicado a los *juegos dinámicos*.

Otro de los temas no cubiertos en este capítulo son los *juegos con información incompleta*. Decimos que un juego tiene información incompleta cuando algún jugador desconoce alguna característica relevante o las preferencias de otros jugadores. De nuevo, la realidad económica está repleta de situaciones con información incompleta. Nuestra suposición de que todos los elementos del juego eran de conocimiento compartido es demasiado fuerte para modelar adecuadamente muchas situaciones. De nuevo, la diferencia no es sólo un tema de detalle; las opciones estratégicas y las recomendaciones normativas son muy distintas con información completa o incompleta. Este tema nos ocupará el Capítulo IV de este volumen.

Estos cuatro primeros capítulos han puesto el énfasis en juegos no cooperativos. Otro enfoque a la teoría de juegos son los juegos cooperativos. Estos juegos se caracterizan por la posibilidad de poder suscribir contratos vinculantes para las partes, con un poder superior capaz de hacerlos cumplir. Dentro de esta perspectiva diferente a situaciones de conflicto, podemos utilizar distintos enfoques.

El Capítulo V estará dedicado a realizar un repaso de la bibliografía reciente en temas de *información, arbitraje* y *negociación*, con aspectos cooperativos y no cooperativos. En contraste, el Capítulo VI nos presentará una perspectiva más clásica de los *juegos cooperativos*, representados por lo que se conoce como la forma característica del juego. Se estudiarán distintas soluciones cooperativas al juego y su relación con el equilibrio general.

Los restantes capítulos de este volumen se dedicarán a distintas aplicaciones de la teoría de los juegos. El Capítulo VII utilizará una de las soluciones a los juegos cooperativos, *el valor de Shapley*, y estudiará su aplicación, comparándolo con las alternativas, al problema de *asignación de costes conjuntos*. El Capítulo VIII se centrará en un tipo específico de juegos, llamados de *votación*, donde se pueden discutir distintas reglas de votación, el poder de los distintos grupos o coaliciones, etc.

Los Capítulos IX y X se dedicarán, el primero, de forma general, y el segundo, con un tema específico, a la aplicación de *la teoría de juegos en la economía industrial*, uno de los campos más prolíferos en el uso de la teoría de juegos. Finalmente, el último capítulo presentará los resultados más recientes sobre la *experimentación* del comportamiento de los agentes en juegos y situaciones competitivas en general.

La teoría de juegos constituye una herramienta básica para el análisis de situaciones de conflicto y competencia. Espero que este volumen sobre la teoría de juegos sea útil para el lector. Su elaboración ha sido posible gracias a la colaboración de los participantes en este volumen. A todos ellos mi sincero agradecimiento.

Referencias

Aumann, R. J. (1976), «Agreeing to Disagree», *Annals of Statistics*, nº 4.

Axerlrod, R. (1984), «The Evolution of Cooperation», Basic Books.

Blackwell, D. y M. A. Girshick (1954), «Theory of Games and Statistical Decisions», Dover Pub.

Dresher, M. (1981), «The Mathematics of Games of Strategy», Dover pub.

Everett, H. (1957), «Recursive Games», *Annals of Mathematical Study*, nº 39.

Friedman, A. (1971), «Differential Games», Wiley.

Friedman, I. W. (1986), «Game Theory with Applications to Economics», Oxford University Press.

Gillette, D. (1957), «Stochastic Games with Zero Stop Probabilities», *Annals of Mathematical Study*, nº 39.

Glicksberg, I. L. y O. A. Gross (1950), «Notes on Games over the Square I», contributions to the Theory of Games-1, Princeton University Press.

Herstein, I. N. y J. W. Milnor (1953), «An axiomatic Approach to Measurable Utility», *Econometrica*, vol. 21.

Jones, A. J. (1980), «Game Theory», Wiley.

Kakutani, S. (1941), «A Generalization of the Brouwer's Fixed Point Theorem», *Duke Mathematica Journa*l, vol. 8.

Karlin, S. (1959), «The Theory of Infinite Games», vol II, Addison-Wesley.

Kuhn, W. (1953), «Extensive games and the Problem of Information», *Annals of Mathematical Study*, nº 28.

Kuhn, W. y A. W. Tucker (eds.), (1953), «Contributions to the Theory of Games II», Princeton University Press.

Lucas, W. F. (1972), «An Overview of the Mathematical Theory of Games», *Management Science*, vol. 18.

Luce, R. D. y H. Raiffa (1957), «Games and Decisions», Wiley.

Milgrom, P. (1981), «An Axiomatic characterization of Common Knowledge», *Econometrica*, vol. 49.

Nash, J. F. Jr. (1950), «Equilibrium Points in n-person Games», Proceedings of the National Academy of Science, nº 36.

Nash, J. F. Jr. (1951), «Non-Cooperative Games», *Annals of Mathematics*, nº 54.

Nash, I. F. Jr. (1953), «Two-Person Cooperative Games», *Econometrica*, vol. 21.

Nikaido, H. y K. Isoda (1955), «Note on Noncooperative Convex Games», *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 5.

Owen, O. (1967), «An Elementary Proof of the Minimax Theorem», *Management Science*, vol. 13.

Owen, O. (1982), «Game Theory», Academic Press.

Schelling, T. C. (1960), «The Strategy of Conflict», Harvard University Press.

Shapley, L. (1953), «Stochastic Games», Proceedings of the National Academy of Science, nº 39.

Shubick, M. (1982), «Game Theory in the Social Sciences», MIT Press.

Shubick, M. (1984), «A Game-Theoretic Approach to Political Economy», MIT Press.

Sion, M. y P. Wolfe (1957), «On a Game without a Value», contributions to the Theory of Games III, Princeton University Press.

Sobel, M. J. (1971), «Non-cooperative Stochastic Games», Annals of Mathematical Statistics, nº 42.

van Damme, E. (1983), «Refinements of the Nash Equilibrium Concept», Springer.

von Neumann, J. (1959), «On the Theory of Games of strategy», en A. W. Tucker y R. D. Luce (eds.), «Contributions to the Theory of Games IV», Princeton University Press.

von Neumann, J. y O. Morgenstem (1944), «Theory of Games and Economic Behavior», Princeton University Press.

Weber, R. J. (1981), «Non-cooperative Games», notas de clase, Northwestern University Press.